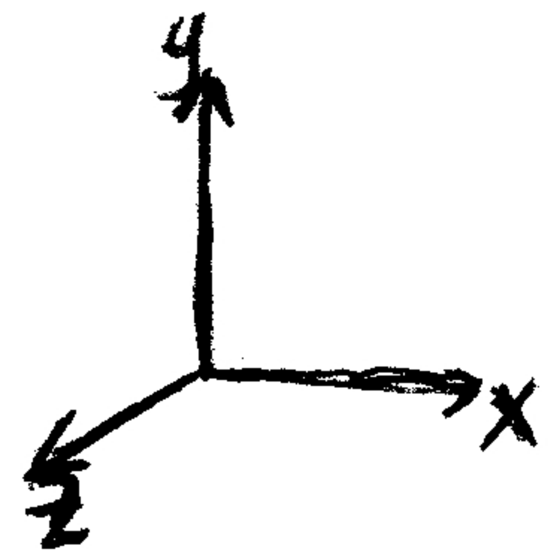
6/10/2015

(Μαθ[illegible] (Διαν. ανάλυση)) βιβλίο

Απειροστικός Λογισμός III

(Να διαβάσω 1ο κεφ. (τομ.))

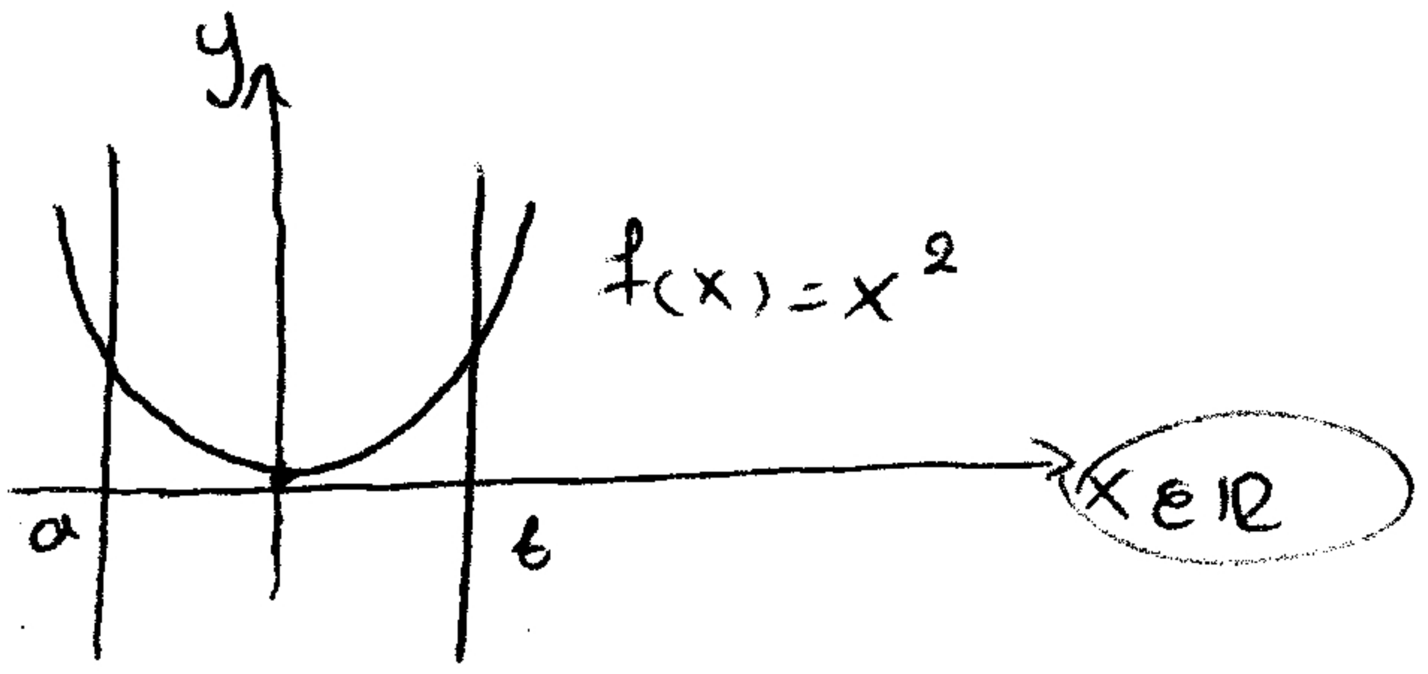


▷ Αντικείμενο Απειροστικού Λογισμού III και IV

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ → τιμή (αριθμός)

$(x,y,z) \to$ διάνυσμα του χώρου

- Συναρτήσεις με περισσότερες (της μιας) ανεξάρτητες ή και εξαρτημένες μεταβλητές
- Ανάλυση σε περισσότερες διαστάσεις.
- **Μέχρι τώρα**: (Σχολείο, 1ο έτος πανεπιστημίου) Συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (x) με μία πραγματική τιμή $y=f(x)\in\mathbb{R}$ δλδ π.χ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$



◉ Η f αυτή έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών (ή σύνολο άφιξης) το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών (ή εικόνα) $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$

◉ Το γράφημα της f:

$$\Gamma_f=\{(x,f(x)) : x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$$

Η f εξαρτάται από μια ανεξάρτητη μεταβλητή $x\in\mathbb{R}\,(=\mathbb{R}^1)$ και έχει μία εξαρτημένη μεταβλητή $y=f(x)\in\mathbb{R}\,(=\mathbb{R}^1)$ [μία μεταβλητή ⟷ μία διάσταση]

≡ Ξέρουμε να μελετάμε τέτοιες συναρτήσεις (Σχολείο, Απ. I κ' II, συνέχεια, διαφορισιμότητα (παραγωγισιμότητα), ολοκληρωσιμότητα, ακρότατα, κλπ)

- Ο γύρω μας κόσμος περιέχει συναρτήσεις που εξαρτώνται από δύο ή τρεις ή περισσότερες μεταβλητές και έχουν τιμές πραγματικούς αριθμούς ή διανύσματα.

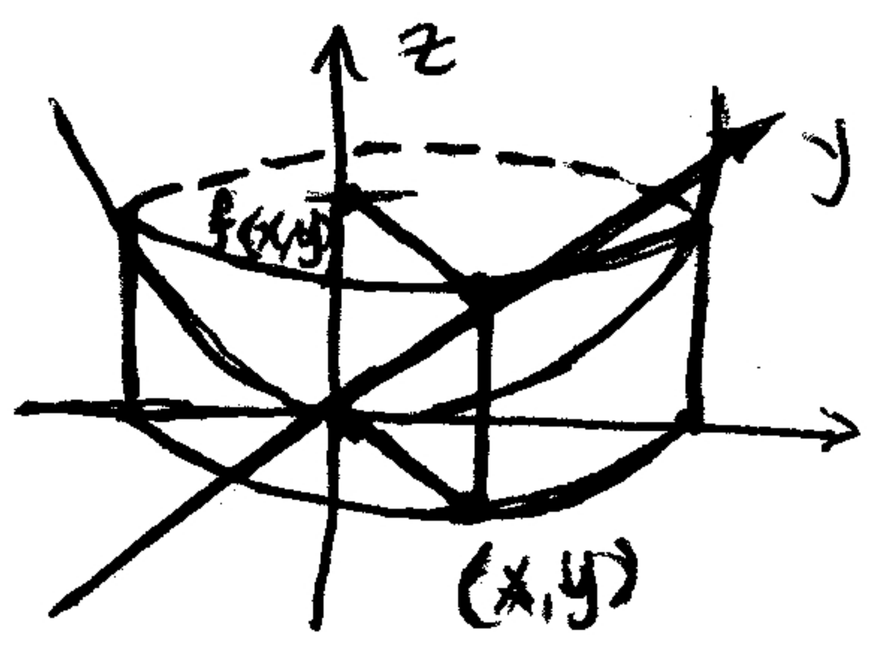
- Στον Απ. III κ' IV θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις περισσοτέρων (n) ανεξαρτήτων μεταβλητών.

δλδ $\forall\,\bar{x}=(\underset{\in\mathbb{R}}{x_1},\dots,x_n)\in \underset{\text{πεδίο ορισμού της } f}{D}\subseteq\mathbb{R}^n \quad \exists!\ f(\bar{x})=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$

• Ειδικότερα αν $n=2$ γράφουμε συνήθως: $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=z \in \mathbb{R}$

δλδ $\forall (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \ \exists! \ f(x,y)=z \in \mathbb{R}$

Π.χ.



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2+y^2 = z$

$(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$

Παράδειγμα:

$T: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$T(x,y,z) \in \mathbb{R}$ → πραγματική συνάρτηση, δίνει τη θερμοκρασία στο σημείο $(x,y,z) \in A$

Επίσης θα ασχοληθούμε με διανυσματικές συναρτήσεις $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

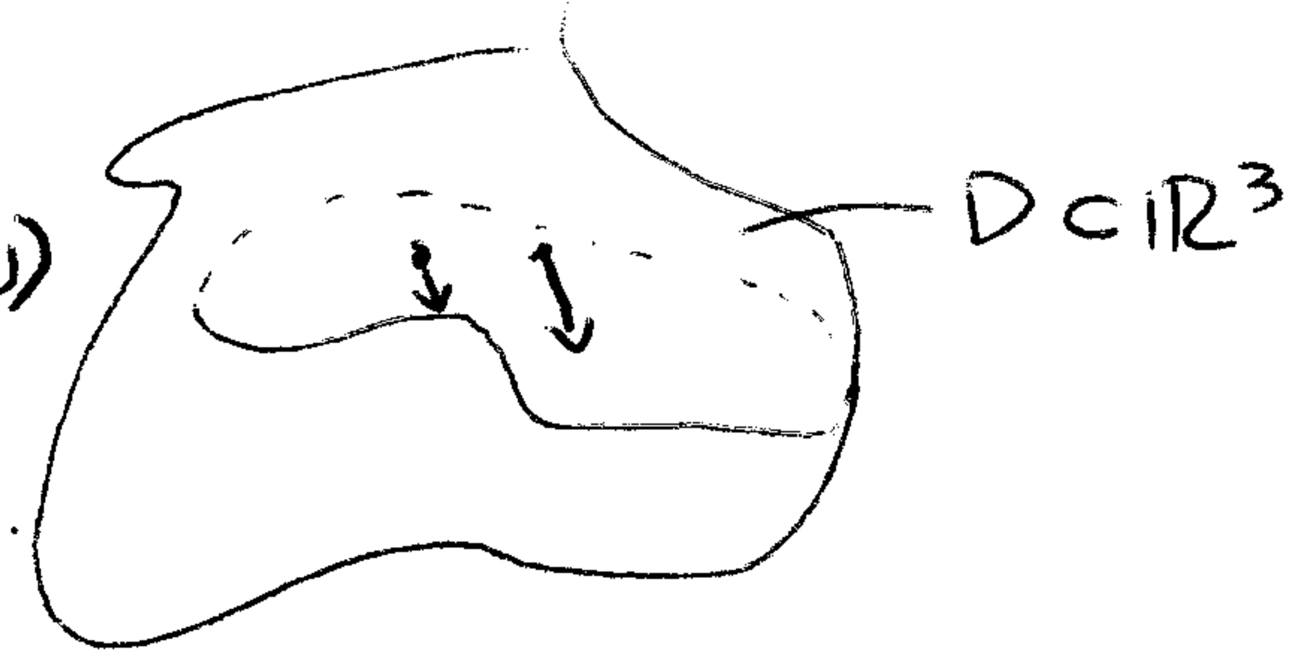
Το συχνότερο παράδειγμα είναι διανυσματικά πεδία, όπου $\boxed{n=m}$

π.χ. αν $n=m=3$

ένα ρευστό έχει στο σημείο $(x_0,y_0,z_0) \in D \subset \mathbb{R}^3$ την ταχύτητα $v(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 =$

$= (v_1(x_0,y_0,z_0), v_2(x_0,y_0,z_0), v_3(x_0,y_0,z_0))$

, όπου v_i, $i=1,2,3$, .. πραγματικές συναρτήσεις.

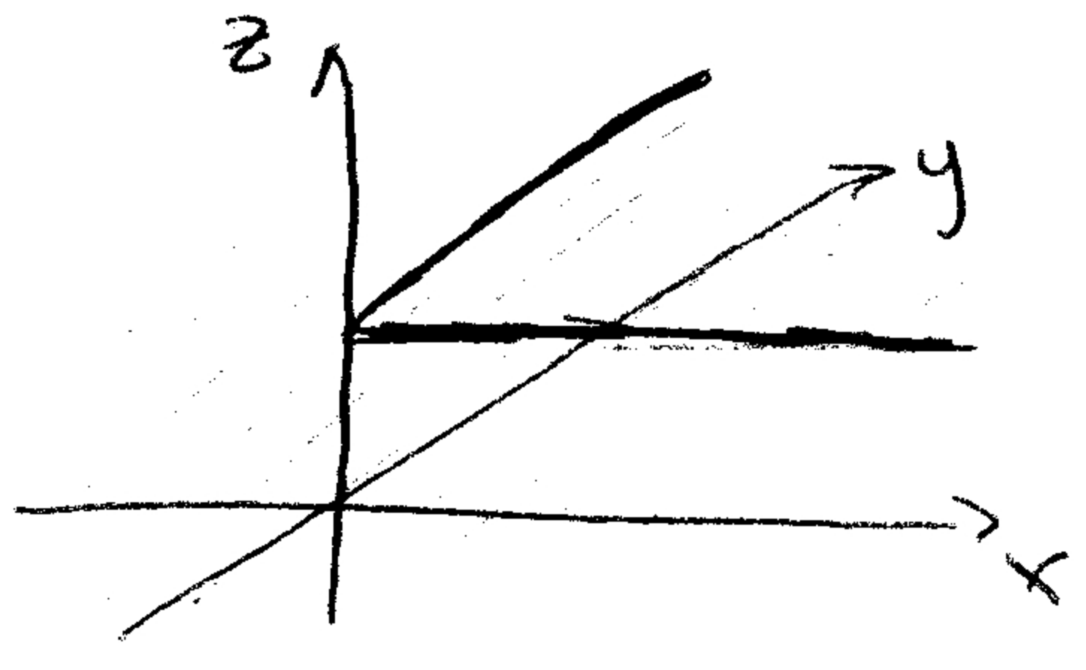


Δηλαδή αν γνωρίζουμε πως συμπεριφέρονται οι v_i, $i=1,2,3$, τότε γνωρίζουμε πως συμπεριφέρεται η $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$ (επειδή αν ξέρω πως μεταβάλλονται οι συντεταγμένες v_1,v_2,v_3 ενός διανύσματος $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$, ξέρω πώς μεταβάλλεται το διάνυσμα).

• Απλό (αλλά σημαντικό) παράδειγμα για το τι αλλάζει αν από **μία** πραγματική και ανεξάρτητη μεταβλητή, πάμε σε δύο $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Θέμα ΕΞΕΤ.

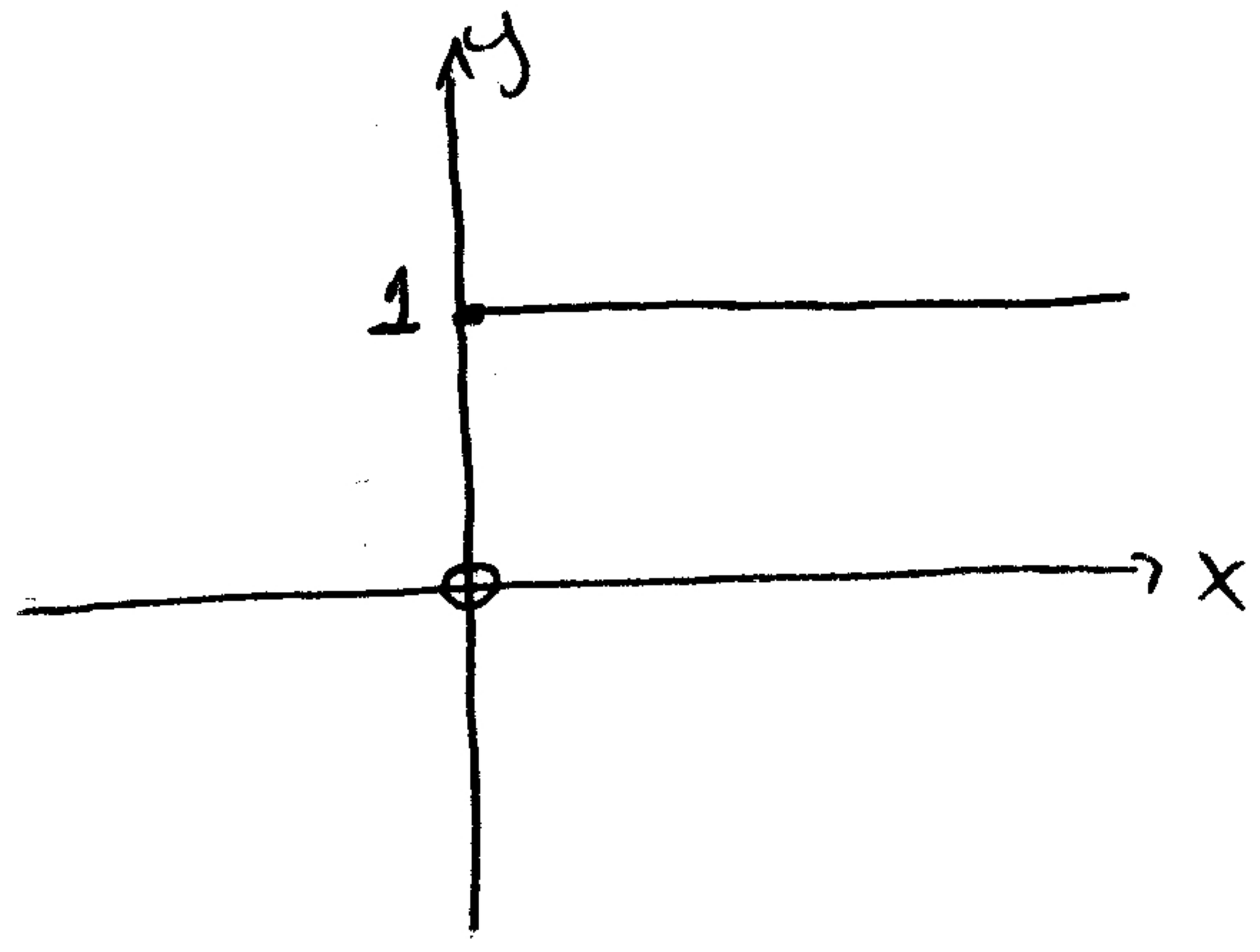
$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



"μάλλον" (δεν έχουμε ακόμα τους ορισμούς) η h είναι ασυνεχής στα σημεία:

$(x,y) \in \{(x,0): x \geq 0\} \cup \{(0,y): y \geq 0\}$

Για να δούμε τι συμβαίνει με την συνάρτηση $h': \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με
$h'(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$



Η h' είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0=0$, αφού $\exists\, \varepsilon>0$ (π.χ. $\varepsilon=\frac{1}{2}$) $\forall\, \delta>0\ \exists\, x_1\in(-\delta,\delta)$ (π.χ. $x_1=-\frac{\delta}{2}$)

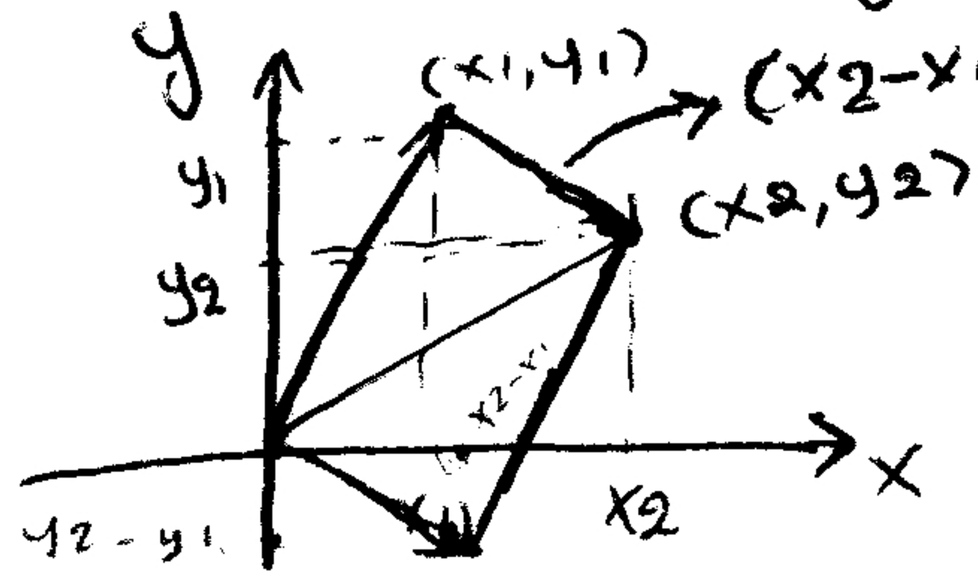
$$|\underbrace{h'(0)}_{=1}-\underbrace{h(x_1)}_{=0}|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

ή αλλιώς: $\exists\,(x_n)\in\mathbb{R}$ με $\overbrace{x_n\to x_0=0}^{\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\,\forall n\geq n_0\ |x_n-x_0|<\varepsilon}$ και $h'(x_n)=0$, το οποίο δεν συγκλίνει στο $h'(0)=1$ $(\not\to)$.

ΆΡΑ: Για να μελετήσουμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού στο $\mathbb{R}^n$ πρέπει να φέρουμε τη δομή του. Ειδικότερα να ορίσουμε μία απόσταση μεταξύ των σημείων του.

Απόσταση δύο σημείων στον $\mathbb{R}^2$

1) Αντιστοιχούμε τα σημεία του επιπέδου (π.χ. του πίνακα) με διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$, αφού ορίσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.



Άρα η απόσταση των σημείων $P_2=(x_2,y_2)$ και $P_1=(x_1,y_1)$ είναι το μήκος του διανύσματος (x_2-x_1,y_2-y_1), δηλ. $\|(x_2-x_1,y_2-y_1)\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$